

Uma aproximação linear da demanda elástica de viagens em redes congestionadas de tráfego urbano com custos assimétricos e dados imprecisos

Wanderley de Souza Alencar
Leslie Richard Foulds
Hugo Alexandre D. do Nascimento
Bryon R. Hall[†]
Humberto Longo

Instituto de Informática – INF
Instituto de Matemática e Estatística – IME[†]
Universidade Federal de Goiás – UFG
Goiânia – GO, Brasil

{wanderley,lesfoulds,hadn,longo}@inf.ufg.br
bryon@ufg.br

Resumo

As demandas de viagem em redes congestionadas de tráfego urbano são geralmente elásticas (ou variáveis) e afetadas negativamente pela percepção que os usuários têm dos tempos de viagem. Os custos dos arcos (ou tempos de travessia dos arcos) são quase sempre assimétricos, no sentido de que o efeito marginal do fluxo de um arco sobre o tempo de viagem de outro arco é diferente do efeito inverso. Os custos de desutilidade (*disutility costs*) associados às demandas de viagem elásticas são também, na maioria dos casos, assimétricos. Além disso, devido aos dados coletados serem imprecisos, às vezes ocorrem inconsistências nas contagens observadas nos arcos e nas demandas de viagem. Este artigo aborda o problema de estimar as demandas de viagem em redes congestionadas de tráfego urbano com tais características. Como não há nenhum modelo de otimização exato conhecido para este problema, a busca por métodos eficazes para aplicação em problemas de grande escala é conveniente. São descritos, assim, dois modelos de aproximação linear para resolver o problema. Um experimento computacional utilizando os modelos para resolver um problema clássico (*Corridor Problem*) apresentou resultados favoráveis.

Palavras-Chave: Redes urbanas de tráfego, demanda elástica de viagens, matriz OD, custos assimétricos, dados imprecisos, aproximação linear.

Área principal: L&T – Logística e Transportes.

Abstract

Travel demands in congested urban traffic networks are usually elastic (variable) as they are adversely affected by perceived travel times. Also, link costs (street travel times) are often asymmetric in the sense that the marginal effect of one link flow on the travel time of another link is different from the reverse effect. The disutility costs associated with the elastic travel demands are also usually asymmetric. Furthermore, sometimes there are inconsistencies in observed link counts and travel demands because these input data are imprecise. We study the problem of estimating travel demands in congested urban traffic networks with these characteristics. As there is no known exact optimisation model for this problem, the quest for highly effective large-scale methods has been elusive. We describe linear approximation models to address this issue. Computational experience in using the models to solve a classical test problem is favourable.

Keywords: Urban traffic networks, elastic travel demand, OD table, asymmetric costs, imprecise observations, linear approximation.

Main area: L&T – Logistics and Transportation.

1 Introdução

Em todo o mundo há uma crescente motivação para a melhoria do desempenho das redes urbanas de transporte. É vital para a sociedade que dados precisos a respeito do tráfego sejam utilizados eficientemente para a manutenção e aprimoramento dos sistemas de transporte. À medida que a população urbana avoluma-se, as ruas tornam-se congestionadas e, portanto, os gestores de planejamento urbano precisam garantir uma qualidade satisfatória nos serviços prestados aos usuários. O planejamento deve estimular o desenvolvimento econômico, diminuir os congestionamentos e reduzir a poluição veicular. Para tanto deve considerar o comportamento individual dos usuários durante a escolha de suas rotas particulares. Uma atividade importante na gestão de sistemas de transporte é a estimação de matrizes origem-destino para as demandas de viagem que obedeçam aos princípios de equilíbrio de usuário. Um passo útil neste processo de estimação é a identificação de padrões de fluxos utilizados pelos usuários que trafegam na rede de transporte, o que envolve a resolução do Problema de Alocação de Tráfego (*Traffic Assignment Problem – TAP*).

Destaca-se que estamos preocupados com o planejamento e o projeto de certas redes urbanas de transporte, as congestionadas, e não com a organização de suas operações do dia a dia. Numa rede viária sob análise, num determinado período de tempo especificado, uma entrada da matriz de demandas de viagem (matriz OD) representa a demanda existente entre um determinado par origem-destino. O que se deseja é estimar as entradas desta matriz a partir dos dados obtidos em observações prévias a respeito do fluxo de tráfego existente nos arcos da rede e das demandas de viagem anteriores (armazenadas numa matriz OD prévia, ou *Prior Trip Table – PTT*).

Por muitas décadas, vários métodos de estimação de matrizes OD baseados na contagem de fluxos nos arcos têm sido desenvolvidos. Um conceito chave na estimação de matrizes OD é a identificação dos pares OD realmente utilizados na rede. Matrizes OD e contagens de fluxos nos arcos estão interrelacionados pelo processo de alocação de tráfego para os vários possíveis caminhos que interligam cada par OD. Em grandes redes congestionadas de tráfego urbano, as demandas de viagem são variáveis e são afetadas negativamente pela percepção que os usuários têm dos tempos de deslocamento naquela rede. Em termos econômicos, isto significa que as demandas são elásticas (ao invés de inelásticas, ou constantes). Quando as funções subjacentes de custo de travessia de arco são positivas, monotônicas, integráveis e separáveis, uma alocação de tráfego com demandas elásticas de viagem pode ser identificada como correspondente à solução ótima de um modelo clássico, o *Convex Multicommodity Flow Model* apresentado por Beckmann et al. (1956). A demanda elástica de cada par OD representa, de maneira unívoca, uma *commodity*. Já quando as funções subjacentes são não separáveis, mas são simétricas, uma alocação para demandas elásticas de viagem pode ser identificada como correspondente à solução ótima para o *Convex Multicommodity Flow Model* proposto por Dafermos (1982).

Por outro lado, os custos de viagem nos arcos são, com frequência, assimétricos no sentido de que o efeito marginal do fluxo de um arco sobre o tempo de viagem de outro arco é diferente do efeito inverso. Os custos de desutilidade associados aos pares OD são, também, normalmente assimétricos. Além disso, é comum haver inconsistências nas contagens observadas nos arcos e nas demandas de viagem devido ao fato dos dados coletados serem imprecisos. Não há nenhum conhecido modelo exato de otimização para o TAP que considere custos assimétricos para os arcos (Sheffi, 1984, p. 203). Ainda, até onde sabemos, nenhum método efetivo para instâncias de grande escala foi registrado na literatura científica dedicada à questão, como aqueles que estão disponíveis para os problemas com demandas inelásticas de viagens e custos simétricos nos arcos. Esses resultados formam a base para o desenvolvimento do presente artigo. O que se propõe aqui são modelos

lineares de aproximação para a estimação de demandas elásticas de viagem (*Elastic TAP*) numa rede de tráfego urbana com custos assimétricos dos arcos e de desutilidade e dados imprecisos. As contribuições do artigo são: (1) dois modelos de programação linear (*Linear Programming* – LP) para a estimação de demandas elásticas de viagens que acomodem custos assimétricos, dados imprecisos e inconsistentes; (2) evidência de que LP pode ser utilizada para a estimação de matrizes OD com este tipo de dados; e (3) uma experimentação para um problema-teste clássico. O restante do artigo está organizado como segue. A próxima seção é destinada à revisão da literatura científica. Na Seção 3 o modelo de Dafermos (1982) é revisitado, bem como as suas condições de equilíbrio de usuário. Na Seção 4 são introduzidos os custos assimétricos para os arcos e para as demandas de viagem, bem como os dados imprecisos. Na Seção 5 é relatada a experiência computacional no uso dos modelos para a resolução de um problema-teste clássico (*Corridor Problem*) extraído da literatura. Finalmente, na Seção 6, são apresentadas as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

2 Revisão da literatura

Há métodos capazes de resolver eficientemente instâncias gigantescas de *Problemas de Alocação de Tráfego* (TAP) com demandas inelásticas de viagem e custos separáveis nos arcos, como os propostos por Bar-Gera (2002) e Babonneau et al. (2006). O último método é baseado no *Analytic Center Cutting Plane Method* (ACCPM), proposto por Goffin et al. (1992). Até 2008, a discussão na literatura de *Elastic TAP* com custos simétricos era direcionada principalmente ao desenvolvimento de modelos e suas propriedades, ao invés de focar nos procedimentos práticos destinados à sua resolução ou experimentação computacional. Ainda em 2008, a principal abordagem para a resolução de *Elastic TAP* empregava variações do clássico método proposto por Frank and Wolfe (1956). Uma segunda abordagem, proposta por Gartner (1980a,b), transformava o problema elástico num problema inelástico equivalente, porém aplicado a uma rede expandida, na qual um *novo* arco era adicionado à rede original para cada um de seus pares OD. Essa transformação é elegante, mas introduz tantos novos arcos quantos são os pares OD da rede original, o que pode ser um número significativo em certas instâncias do problema. Como resultado, casos práticos do problema requerem significativamente mais tempo de processamento computacional. Por consequência, os estudos numéricos mais relevantes para ambas abordagens foram confirmados para instâncias de dimensões modestas, como aquelas descritas por Florian and Nguyen (1974), Gartner (1980b) e Leblanc and Farhangian (1982). Babonneau and Vial (2008) apresentam um método eficiente para o *Elastic TAP* com custos separáveis e simétricos. O método é baseado numa variação do ACCPM, sendo que os autores demonstraram que ele é capaz de resolver instâncias práticas de tamanhos significativos com elevada precisão.

Entretanto, não há um modelo de otimização exato conhecido para o caso em que as funções de custo nos arcos e de desutilidade são assimétricas. A forma mais comum de manusear essa situação é empregar a teoria de inequações variacionais concebida por Kinderlehrer and Stampacchia (1980). A teoria de inequações variacionais de dimensões finitas foi primeiramente aplicada, com sucesso, ao problema de equilíbrio em redes de tráfego por Smith (1979) e Dafermos (1982). Em seu livro, Nagurney (1998) apresenta o tema e aplicações a problemas de redes de transporte, equilíbrio espacial de preços e equilíbrio em mercados financeiros. Entretanto, em nosso conhecimento, os estudos numéricos registrados são ainda limitados.

Além disso, os modelos discutidos até agora são altamente não lineares. Uma forma de tratar as não linearidades indesejadas nas funções subjacentes, para o caso em estudo neste artigo, é realizar aproximações lineares para as funções de custo do arco, do caminho e de

desutilidade. [Sherali et al. \(1994, 2003\)](#) e [Foulds et al. \(2011, 2013\)](#) utilizaram métodos de aproximação linear para estimar matrizes OD para redes de tráfego com demandas de viagem inelásticas e custos assimétricos dos arcos. Seus métodos ajudam a determinar uma matriz OD que, quando utilizada como entrada num processo de alocação de tráfego, retornam fluxos corretos para os arcos e em equilíbrio de usuário. Os modelos também manipulam dados imprecisos e inconsistentes da contagem de fluxos nos arcos e das demandas de viagem.

3 Um modelo TAP com custos assimétricos

Seja $G(N, A)$ um grafo orientado e que representa uma dada rede de tráfego, com um conjunto N de n nós e um conjunto A de arcos não paralelos. Os nós em N podem representar as intersecções de ruas/estradas ou de zonas mais gerais. Os arcos em A representam as ruas e estradas de interesse. Seja $\mathcal{OD} \subseteq (N \times N)$ o conjunto de pares origem-destino para todos os possíveis caminhos OD que podem ser efetivamente utilizados em qualquer alocação de tráfego final e racional. Seja T_{ij} a entrada na linha i e coluna j na matriz origem-destino, ou seja, o número de usuários com origem no nó i e destino no nó j . O que se deseja é estimar a matriz origem-destino, $T = (T_{ij})_{n \times n}$.

Seja f_a o fluxo existente no arco $a, a \in A$. Considera-se que cada arco individual a tem um custo não separável $c_a(\mathbf{f})$, onde \mathbf{f} é um vetor-coluna de todos os fluxos existentes. Ou seja, para todos os arcos $a \in A$, o custo do arco c_a depende de um determinado número de outros fluxos e não apenas de f_a . Métodos para a estimação dos parâmetros da função $c_a(\mathbf{f})$ foram desenvolvidos por [García-Ródenas and Verastegui-Rayó \(2008\)](#). Assume-se que o custo de cada caminho pode ser obtido pela soma dos custos de seus arcos constituintes. As funções $c_a()$, $a \in A$, são consideradas contínuas e diferenciáveis, integráveis, positivas e estritamente crescentes. No momento, elas também são consideradas simétricas, no sentido de que, para todos os arcos distintos $a, b \in A$, o efeito marginal do fluxo f_b no custo $c_a(\mathbf{f})$ é igual ao efeito marginal do fluxo f_a no custo $c_b(\mathbf{f})$. Ou seja:

$$\partial c_a(\mathbf{f}) / \partial f_b = \partial c_b(\mathbf{f}) / \partial f_a, \quad \forall a, b \in A. \quad (3.1)$$

A notação seguinte é definida para cada par OD, $(i, j) \in \mathcal{OD}$. Seja n_{ij} o número de possíveis, e distintos, caminhos acíclicos para o par (i, j) , e p_{ij}^k o k -ésimo caminho de menor custo para o par (i, j) . Seja $(p_{ij}^k)_a = 1$, se o k -ésimo caminho contém o arco a , e $(p_{ij}^k)_a = 0$ em caso contrário. Seja x_{ij}^k o número de usuários do k -ésimo caminho entre o par (i, j) . O vetor-coluna de todos os caminhos é denotado por \mathbf{x} . Esses parâmetros e variáveis são relacionadas por meio das seguintes condições:

$$\sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ij}^k = T_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (p_{ij}^k)_a \cdot x_{ij}^k = f_a, \quad \forall a \in A, \quad (3.3)$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD} \text{ and } k = 1, 2, \dots, n_{ij}. \quad (3.4)$$

O conjunto de variáveis $TA(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{T}) = \{x_{ij}^k, f_a, T_{ij} \mid a \in A, (i, j) \in \mathcal{OD} \text{ e } k = 1, \dots, n_{ij}\}$ para as restrições lineares (3.2)–(3.4) é chamado de alocação de tráfego para G .

3.1 Demandas elásticas de viagens

Ao contrário do que ocorre na situação de demandas inelásticas, nas demandas elásticas os valores T_{ij} , $(i, j) \in \mathcal{OD}$, não são mais fixos. Eles são variáveis que dependem do custo c_{ij}^* dos caminhos mínimos da origem i para o destino j . Isto é:

$$T_{ij} = \lambda_{ij}(c_{ij}^*), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}. \quad (3.5)$$

Aqui λ_{ij} é a função de demandas de viagem para o par (i, j) , a qual é considerada ser continuamente diferenciável, integrável, não negativa, limitada superiormente e estritamente decrescente em relação aos caminhos de custo mínimo c_{ij}^* . Estes pressupostos significam que a inversa de λ_{ij} existe. Ela é chamada de função desutilidade (*disutility function*) associada a (i, j) e é denotada por λ_{ij}^{-1} . Devido aos pressupostos aplicáveis às funções de demanda λ_{ij} , as funções de desutilidade λ_{ij}^{-1} são também integráveis, continuamente diferenciáveis, não negativas, limitadas superiormente e estritamente decrescentes. Neste momento, elas são também consideradas simétricas, no sentido de que, para todo par de pares OD distintos $(i, j), (k, \ell) \in \mathcal{OD}$, o efeito marginal da demanda $T_{k,\ell}$ no custo de desutilidade $\lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{T})$ é igual ao efeito marginal da demanda T_{ij} no custo de desutilidade $\lambda_{k\ell}^{-1}(\mathbf{T})$. Isto é:

$$\partial \lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{T}) / \partial T_{k\ell} = \partial \lambda_{k\ell}^{-1}(\mathbf{T}) / \partial T_{ij}, \quad \forall (i, j), (k, \ell) \in \mathcal{OD}. \quad (3.6)$$

Usuários das redes atuais de tráfego agem unilateralmente, em seu próprio interesse, e selecionam seus caminhos individuais, de uma certa origem para determinado destino, objetivando minimizar seu próprio custo de viagem. Isto usualmente conduz ao chamado equilíbrio de usuário (*user equilibrium*), que corresponde ao Primeiro Princípio de Wardrop que preconiza que o custo de todos os caminhos utilizados são iguais e não maiores que aqueles vivenciados por qualquer usuário que empregue um dos caminhos que não foram utilizados. Este princípio pode ser estendido para um equilíbrio elástico de usuário (*elastic user equilibrium*), onde os custos de todos os caminhos utilizados são iguais, mínimos e idênticos aos custos de desutilidade, e não maiores que aqueles vivenciados por qualquer usuário que empregue um dos caminhos que não foram utilizados. Custos em caminhos não utilizados podem ser maiores que os custos de desutilidade. Uma alocação $TA(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{T})$ satisfazendo (3.2) - (3.4) e induzindo um conjunto \mathbf{f} de fluxos nos arcos por meio de (3.3) está em equilíbrio elástico de usuário se, para todo par $(i, j) \in \mathcal{OD}$ e cada rota p_{ij}^k , as seguintes condições são satisfeitas:

$$x_{ij}^k > 0 \Rightarrow c_{ij}^k = \lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{T}), \quad (3.7)$$

$$x_{ij}^k = 0 \Rightarrow c_{ij}^k \geq \lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{T}). \quad (3.8)$$

Observe que (3.8) implica que se os usuários de um particular par OD, $(i, j) \in \mathcal{OD}$, na rede decidiram não viajar então os custos de todos os caminhos associados a (i, j) excederam o custo de desutilidade associado àquele par OD. Estas condições habilitam os planejadores a calibrar a atração relativa de vários caminhos OD a partir da determinação da projeção de suas demandas elásticas. Nagurney (2000) e outros autores consideram isto útil no planejamento de transportes. Dafermos (1982) estabeleceu a equivalência entre as condições (3.7) e (3.8) e as condições de Karush-Kuhn-Tucker (Kuhn and Tucker, 1951) a respeito da existência de uma solução ótima para um problema de otimização (apropriadamente) construído e que tenha custos simétricos para os arcos e funções de desutilidade. Quando todos os pressupostos anteriores a respeito das funções subjacentes são obedecidos, uma alocação de tráfego em equilíbrio elástico de usuário pode ser obtida como solução para o seguinte problema de programação matemática devido a Dafermos (1982):

$$\text{Minimize } Z(\mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{T}) = \sum_{a \in A} \int_0^f c_a(w) dw - \sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \int_0^T \lambda_{ij}^{-1}(w) dw, \quad (3.9)$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ij}^k = T_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}, \quad (3.10)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (p_{ij}^k)_a \cdot x_{ij}^k = f_a, \quad \forall a \in A, \quad (3.11)$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}, k = 1, \dots, n_{ij}. \quad (3.12)$$

As expressões em (3.9) são integrais de linha. Como (3.9) é estritamente convexa, os custos dos arcos, dos caminhos e de desutilidade, os fluxos \mathbf{f} nos arcos e as demandas \mathbf{T} de viagem são todos únicos na alocação elástica de tráfego produzida pela resolução do problema (3.9)–(3.12). Entretanto, em termos das variáveis \mathbf{x} , (3.9) é apenas convexa e, por consequência, um padrão de fluxo \mathbf{f} nos arcos pode induzir mais de um padrão de fluxo nos caminhos \mathbf{x} . Isto é, os valores em \mathbf{x} não são necessariamente únicos. Considere-se agora o caso onde os custos dos arcos e de desutilidade são *assimétricos*.

4 Custos assimétricos dos arcos e de desutilidade

Até agora foi assumido que os efeito marginal do fluxo de um arco (demanda de viagem) em outro arco (custo de desutilidade) é igual ao efeito inverso. Entretanto, na maioria das redes congestionadas de tráfego urbano, isto não é usualmente verdadeiro, e os custos dos arcos e de desutilidade são assimétricos, ou seja, há arcos e pares OD para os quais as definições (3.1) e (3.6) não são satisfeitas. Como observado por Sheffi (1984, ch. 8), este fato é importante e comumente ocorre em vias de mão dupla congestionadas e nas intersecções sinalizadas onde são permitidas conversões à esquerda. A acomodação da assimetria usualmente conduz a um tratamento bem mais realístico do fluxo de tráfego em intersecções e em vias de mão dupla. Entretanto, como observado por Patriksson (1994), devido às integrais de linha em (3.9) não serem bem definidas quando há assimetria, não é conhecido um modelo matemático equivalente que possa ser utilizado para encontrar uma alocação de tráfego em equilíbrio elástico de usuário. Consequentemente, estudos numéricos de redes de tráfego práticas e de grande escala são escassos. Dessa forma, propomos um método de aproximação linear rápido para uma extensão do problema (3.9)–(3.12), que acomode custos assimétricos e dados imprecisos, possivelmente inconsistentes, como entrada.

4.1 Estimação dos custos dos arcos, dos caminhos e de desutilidade

Os modelos adiante foram construídos com o objetivo de auxiliar na estimação da matriz OD \mathbf{T} a partir dos fluxos observados nos arcos $f'_a, \forall a \in A$, e de uma matriz OD prévia \mathbf{T}' . Observe que está se assumindo que os fluxos são conhecidos para todos os arcos e que \mathbf{T}' é completa, no sentido de que estimativas de demandas de viagem são conhecidas para todos os pares OD. Quando alguns fluxos ou demandas de viagem estão ausentes, estimativas de baseadas no princípio de conservação de fluxo nos arcos, ou nas demandas prévias, devem ser realizadas a partir das informações disponíveis. Foi também considerada a enumeração implícita de todos os caminhos factíveis $p_{ij}^k, k = 1, \dots, n_{ij}$, para cada par (i, j) . Na implementação dos modelos propostos para instâncias práticas é desnecessário gerar, previamente, todos estes caminhos. Ao invés disso, eles são gerados à medida em que são necessários por meio da abordagem de geração de colunas, como popularizado por Lasdon (1970). Isto é simples para os modelos propostos, pois eles são LPs padrões com funções objetivos de coeficientes não negativos. Os detalhes relevantes são fornecidos por Sherali et al. (1994, 2003). O custo do k -ésimo menor caminho para um par (i, j) , $(i, j) \in \mathcal{OD}$, são variáveis sob as condições correntemente vigentes para o período de tempo sob análise. Assim as contagens de fluxos dadas, $f'_a, \forall a \in A$, podem ser empregadas para estimar os custos dos caminhos OD como se segue:

$$c_{ij}^k = \sum_{a \in A} (p_{ij}^k)_a c_a(\mathbf{f}'), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD} \text{ and } k = 1, \dots, n_{ij}. \quad (4.1)$$

Considere os custos de alguns dos outros caminhos (com custos maiores) pertencentes ao conjunto $\{p_{ij}^k | k = 1, \dots, n_{ij}\}$, que possivelmente podem ser utilizados. Os custos atuais

destes caminhos não precisam ser conhecidos, apenas devem ser maiores que c_{ij}^* . É assumido que em nenhum caminho encontrado há a repetição de um mesmo nó. Além disso, não há nenhuma outra restrição quanto à similaridade de quaisquer dois caminhos para o mesmo par OD. Seja D_{ij} o custo de desutilidade para o par OD (i, j) sob as condições correntemente vigentes para o período de tempo sob análise. A matriz OD prévia \mathbf{T}' pode ser utilizada para estimar os custos D_{ij} como constantes:

$$D_{ij} = \lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{T}'), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}. \quad (4.2)$$

Os custos dos caminhos OD são modificados a fim de tentar associar cada usuário para um de seus caminhos menos onerosos, com custo $c_{ij}^* = \lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{T})$, onde \mathbf{T} é a matriz OD final estimada com as demandas na alocação de tráfego TA . Se isto puder ser atingido, o resultado será uma alocação de tráfego em equilíbrio elástico de usuário como definido em (3.7) e (3.8). Seja K_{ij} o conjunto de índices k em que p_{ij}^k é um caminho de custo mínimo, e seja K'_{ij} conjunto de índices de todos os demais caminhos (i, j) . Os custos C_{ij}^k são agora definidos como constantes: modifiquem-se os C_{ij}^k como se segue:

$$C_{ij}^k = \begin{cases} c_{ij}^*, & \text{para } k \in K_{ij}; \\ M_1 \cdot c_{ij}^*, & \text{para } k \in K'_{ij}, \text{ onde } M_1 \text{ é um número real positivo adequado.} \end{cases} \quad (4.3)$$

4.2 Dados imprecisos ou inconsistentes

Devido às aproximações na modelagem de G ou em decorrência de erros de observação, a contagem de fluxo num arco ou nas entradas da matriz OD prévia podem ser imprecisas e, por consequência, inconsistentes com respeito às equações (3.2) e (3.3). Assim, quando \mathbf{f}' e \mathbf{T}' são atribuídos, respectivamente, a \mathbf{f} e a \mathbf{T} , podem surgir inconsistências e uma solução factível x para o sistema (3.2) e (3.3) pode não existir. Para acomodar essas inconsistências são definidas variáveis artificiais reais e não negativas $\{Y_{ij}^+, Y_{ij}^- \mid (i, j) \in \mathcal{OD}\}$ e $\{y_a^+, y_a^- \mid a \in A\}$, as quais permitem desvios para acima ou para baixo em \mathbf{f} e \mathbf{T} , como segue:

$$\sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ij}^k + Y_{ij}^+ - Y_{ij}^- = T'_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}, \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (p_{ij}^k)_a \cdot x_{ij}^k + y_a^+ - y_a^- = f'_a, \quad \forall a \in A. \quad (4.5)$$

Os vetores das variáveis artificiais são denotados, respectivamente, por \mathbf{Y} e \mathbf{y} . A seguir são apresentados os modelos de programação linear para o problema da estimação de matriz OD sob análise.

4.3 O modelo proposto: $SM(\mathbf{E}, \mathbf{A})$

[Sherali et al. \(1994\)](#) propôs um modelo de programação linear denominado $LP(TT)$. Ele foi empregado para estimar uma matriz OD para o caso de demandas inelásticas, com custos simétricos e dados imprecisos. O objetivo era produzir uma matriz OD que seria utilizada como entrada para um processo de alocação de tráfego (em equilíbrio de usuário) e que, ao final, retornaria os fluxos nos arcos e as demandas de viagem. O modelo apresentado a seguir foi denominado $SM(\mathbf{E}, \mathbf{A})$ (*Sherali Model extended to Elastic demand and Asymmetric costs*). A fim de construir um modelo de aproximação linear para o problema (3.9)–(3.12), foram introduzidos os termos em (4.4) como estimativas dos custos totais do usuário e de desutilidade na rede. Como tais, eles são aproximações dos termos presentes em (3.9).

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} C_{ij}^k \cdot x_{ij}^k - \sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} D_{ij} \cdot T_{ij}. \quad (4.6)$$

Empregando (3.10) para substituir as variáveis T_{ij} , após alguns rearranjos, (4.6) torna-se:

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (C_{ij} - D_{ij}) \cdot x_{ij}^k. \quad (4.7)$$

Os vetores \mathbf{Y} e \mathbf{y} são introduzidos, respectivamente, em (4.4) e (4.5) para permitir desvios, positivos ou negativos, nas observações das demandas de viagem e das contagens de fluxos nos arcos. De forma correspondente, as funções objetivo dos modelos são penalizadas por meio da introdução da soma ponderada destes desvios, como mostrado em (4.8). Os termos de penalidade em (4.8) são incluídos com o objetivo de produzir uma alocação de tráfego em equilíbrio elástico de usuário e que reflita a matriz OD prévia, bem como as contagens de fluxo observadas, de maneira tão próxima quanto for considerada adequada pelo usuário do modelo. As constantes M_2 e M_3 são parâmetros de penalização convenientes, cujos valores são definidos em (4.13). Observe que os valores dos pesos σ_2 e σ_3 podem ser configurados de forma independente, de acordo com o grau relativo de importância que o usuário estabelecer para ambos os tipos de desvios. Isto conclui a primeira proposta de modelo de programação linear, $SM(A, E)$:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } z(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{y}) = & \sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (C_{ij}^k - D_{ij}) \cdot x_{ij}^k + \\ & \sigma_2 \cdot M_2 \cdot \sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} (Y_{ij}^+ + Y_{ij}^-) + \sigma_3 \cdot M_3 \cdot \sum_{a \in A} (y_a^+ + y_a^-), \end{aligned} \quad (4.8)$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ij}^k + Y_a^+ - Y_a^- = T'_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}, \quad (4.9)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (p_{ij}^k)_a \cdot x_{ij}^k + y_a^+ - y_a^- = f'_a, \quad \forall a \in A, \quad (4.10)$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}, k = 1, \dots, n_{ij}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{Y}, \mathbf{y} \geq 0; \quad (4.12)$$

onde os parâmetros de penalização em (4.8) são definidos como:

$$\begin{aligned} M_2 &= 1 + \max_{a \in A} \{c_a(\mathbf{f}')\} + \sum_{a \in A} c_a(\mathbf{f}') \cdot f'_a, \\ M_3 &= 1 + \max_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \{\lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{T}')\} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} D_{ij} \cdot T'_{ij}; \end{aligned} \quad (4.13)$$

com os pesos $\sigma_2, \sigma_3 \in [0, 1]$.

Observe que devido à (3.8), os coeficientes da função objetivo em (4.8) são todos não negativos. Após a resolução de $SM(A, E)$, as estimativas das demandas de viagem, valores de T_{ij} , podem ser calculadas pela substituição dos valores obtidos para x_{ij}^k em (3.2).

4.4 O modelo proposto: $GM(A, I)$

Como mencionado na seção 2, Gartner (1980a,b) concebeu um mecanismo para transformar o modelo (3.9)–(3.12) em um modelo inelástico equivalente (*Inelastic TAP*) aplicado sobre uma rede expandida, onde um novo arco é adicionado para cada par OD existente na rede original. O custo associado a cada novo arco é uma função argumento-complemento da função de desutilidade para aquele par OD. Isto assegura que todos os custos dos arcos são estritamente crescentes. Para a demanda $T_{i,j}$ do par (i, j) , o fluxo no novo arco (i, j) é denotado por e_{ij} e representa o excesso de fluxo, ou seja, a demanda de viagem que não foi atendida pelos caminhos originais de i para j . Se um limite superior suficientemente alto, digamos U'_{ij} , for imposto para todos os fluxos (i, j) , inclusive para o do novo arco, então:

$$T_{ij} + e_{ij} = U'_{ij}. \quad (4.14)$$

A seguir é apresentado o modelo $GM(A, I)$ (*Gartner Model extended to Asymmetric costs and Imprecise input data*), o qual é equivalente ao $SM(E, A)$. Quando (3.2) e (4.14)

são utilizadas para substituir T_{ij} em (4.8), após alguns rearranjos e a exclusão de um termo constante, tem-se a seguinte extensão do modelo de Gartner (1980a,b).

$$\text{Minimize } z(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{y}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \sum_{k=1}^{n_{ij}+1} (C_{ij}^k \cdot x_{ij}^k) + \sigma_2 \cdot M_2 \cdot \sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} (Y_{ij}^+ + Y_{ij}^-) + \sigma_3 \cdot M_3 \cdot \sum_{a \in A} (y_a^+ + y_a^-), \quad (4.15)$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ij}^k + Y_{ij}^+ - Y_{ij}^- = T'_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}, \quad (4.16)$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{OD}} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (p_{ij}^k)_a \cdot x_{ij}^k + y_a^+ - y_a^- = f'_a, \quad \forall a \in A, \quad (4.17)$$

$$x_{ij}^k \geq 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}, k = 1, \dots, n_{ij} + 1, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{Y}, \mathbf{y} \geq 0; \quad (4.19)$$

onde os parâmetros de penalização e os pesos estão definidos em (4.11),

$$C_{ij}^{n_{ij}+1} = D_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}, \text{ e} \quad (4.20)$$

$$x_{ij}^{n_{ij}+1} = e_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{OD}. \quad (4.21)$$

$SM(E, A)$ e $GM(A, I)$ são modelos lineares padrões, com estrutura de rede e uma base inicial viável que inclui os vetores \mathbf{Y}^+ e \mathbf{y}^+ . Com o uso do método de geração de colunas, eles têm potencial para resolverem problemas práticos de grande escala em tempo computacional razoável.

5 Experimentação computacional

Os modelos $SM(E, A)$ e $GM(A, I)$ foram implementados usando a linguagem JAVA, versão 1.6.0_30 combinada com a API do IBM ILOG CPLEX Optimization Studio v.12.5. Todos os resultados numéricos relatados foram de instâncias de problemas resolvidos por ambos os modelos em um computador pessoal com a seguinte configuração: processador Intel Core i7-3610QM com 2.30GHz, 8GB de RAM e SSD de 120GB. O sistema operacional é o Linux Ubuntu 64-bits, v.12.04. O uso dos modelos é ilustrado por meio da resolução de instâncias numéricas particulares geradas a partir do conhecido *Corridor Problem* (CP) de Gur et al. (1980). Este problema têm sido extensivamente utilizado para testar modelos e métodos de tráfego. Apesar de ser de tamanho relativamente pequeno, esta rede serve como um útil dispositivo de teste por ter múltiplos caminhos entre muitos de seus pares OD e diversas soluções em equilíbrio de usuário. O diagrama da rede tem 12 nós e 18 arcos. Gur et al. (1980) fornecem, para todos os arcos, as suas capacidades efetivas, fluxos prévios observados e custos dos arcos em situação livre de congestionamento. Algumas matrizes OD prévias são também dadas. Os parâmetros para as funções de desutilidade, os pesos aplicados nas funções objetivo e os limites utilizados são detalhados a seguir. Os tempos de execução para todas as instâncias do CP utilizando os modelos $SM(E, A)$ e $GM(A, I)$ foram menores que 20s (tempo de uso da CPU). Em contraste, encontrar uma alocação de tráfego exata e em equilíbrio elástico de usuário para o CP empregando um código concebido pelos autores para implementar inequações variacionais, com os custos dos arcos e de desutilidade, conforme anteriormente especificado, consumiu cerca de 240s. A fim de criar testes numéricos para o problema sob análise, custos assimétricos para os arcos foram calculados por meio de uma generalização da função BPR padrão, criada pelo USA Bureau of Public Roads (1964), com todos os atributos mencionados imediatamente antes de (3.1):

$$c_a(\mathbf{f}') = C_a^F \cdot \left[1 + 0,15 \cdot \left(\left(\sum_{b \in A} v_a^b \cdot f'_a \right) / u_a \right)^4 \right], \quad \forall a \in A. \quad (5.1)$$

Onde C_a^F é o custo do arco na situação livre de congestionamento e u_a é a sua capacidade efetiva, as quais são dadas como parte dos dados originais do problema-teste. Foram definidos pesos $v_a^b \in [0, 1], \forall a, b \in A$. Quando $a = b$, tem-se que $v_a^b = 1,0$, do contrário $v_a^b = 0,1$ para certos pares a, b selecionados de acordo com a estrutura da rede (os pares remanescentes têm $v_a^b = 0,0$). Tem-se que $v_a^b \neq v_b^a$ para a maioria dos pares a, b distintos, implicando na assimetria. As estimativas dos custos de desutilidade foram gerados a partir da função proposta (5.2), que possui os atributos mencionados imediatamente após (3.5). 1.

$$\lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{T}') = \alpha_{ij} \cdot \left[1 + \beta_{ij} \cdot \left(\gamma_{ij} / \left(\delta_{ij} + \sum_{(k,\ell) \in OD} w_{ij}^{k\ell} \cdot T'_{ij} \right) \right)^4 \right], \quad \forall (i, j) \in OD. \quad (5.2)$$

Acompanhando o padrão estabelecido para os custos dos arcos, foram definidos os pesos $w_{ij}^{k\ell} \in [0, 1], \forall (i, j), (k, \ell) \in OD$, com $w_{ij}^{ij} = 1,0$. Para $(i, j) \neq (k, \ell)$, $w_{ij}^{k\ell} = 0,1$ para certos pares $(i, j), (k, \ell) \in OD$, também selecionados de acordo com a estrutura da rede. E, finalmente, 0,0 para os pares remanescentes. Tem-se, assim, que $w_{ij}^{k\ell} \neq w_{ij}^{l k}$ para a maioria dos pares $(i, j), (k, \ell)$ distintos, implicando novamente em assimetria. Os seguintes valores foram utilizados para os custos de desutilidade: $\beta_{ij} = 0,15, \delta_{ij} = 15,00, \forall (i, j) \in OD$. O parâmetro α_{ij} varia de acordo com o par OD e são dados na linha 3 da Tabela 1. Os demais parâmetros utilizados foram $\gamma_{ij} = PTTk_{ij} + \delta_{ij}$ e $U'_{ij} = PTTk_{ij} + 100, \forall (i, j) \in OD$, onde $PTTk$ é a k -ésima matriz de demandas prévias, $k = 1, \dots, 5$. A fim de obter custos que são mais ou menos compatíveis com aqueles costumeiramente obtidos para o CP, os valores brutos dos custos dos arcos e de desutilidade foram escalonados – isto preserva a assimetria e o conjunto original de soluções factíveis. As estimativas para os custos dos caminhos foram calculadas pela substituição dos custos obtidos em (5.1) sobre (4.1). Os custos são então modificados usando (4.3) com $M_1 = 2,00$, como estabelecido em Sherali et al. (1994, 2003). A estimativa dos custos de desutilidade foram calculadas pela substituição dos custos obtidos em (5.2) sobre (4.2).

Tabela 1: Dados de entrada e resultados computacionais.

1	Orig.		4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
2	Dest.	σ_2, σ_3	2	3	5	2	3	4	1	2	3	4	5
3	α_{ij}		43	52	25	50	40	20	28	72	50	45	42
Entrada: Matrizes de demandas prévias – PTT's													
4	PTT1	1, 0,8	600	700	1100	200	300	1500	500	4000	0	500	600
5	PTT2	0,8, 1	600	700	1100	1700	300	0	500	2500	0	2000	600
6	PTT3	0,8, 1	600	300	1500	200	300	1500	500	4000	400	500	200
7	PTT4	0,6, 1	806	504	1109	1512	504	0	504	2520	0	2016	605
8	PTT5	0,2, 1	983	983	983	983	983	983	983	983	983	983	983
Resultados: Matrizes de demandas estimadas – T's													
9	T_{ij}^*		600	711	1036	1643	261	0	503	2554	0	1989	1010
10	T_{ij}^1	0, 1	600	700	1100	200	300	1500	500	4000	0	500	600
11	T_{ij}^2	1, 0,8	600	700	1100	1700	300	0	500	2500	0	2000	600
12	T_{ij}^3	0,8, 1	600	300	1500	200	300	1500	500	4000	400	500	200
13	T_{ij}^4	0,8, 1	787	504	1109	1504	496	0	500	2509	0	2000	591
14	T_{ij}^5	0,6, 1	1033	0	983	983	566	967	983	1033	983	1033	983

O código concebido pelos autores identificou uma alocação de tráfego exata, em equilíbrio elástico de usuário, denotada por $TA^*(\mathbf{x}, \mathbf{f}^*, \mathbf{T}^*)$, para o CP com os dados de entrada como anteriormente especificados. Todos os custos, demandas e fluxos nos arcos de TA^* são únicos, mas os fluxos nos caminhos não são. As demandas de viagens, denotadas por T_{ij}^* , são mostradas na linha 9 da Tabela 11. Dois importantes fatores que afetam o processo

de estimação da matriz OD são a medida estatística de proximidade da matriz OD prévia e as contagens nos arcos que são fornecidas como entrada. Para o CP são apresentados os resultados de seis diferentes tipos de entradas. Estes dados representam vários graus de precisão em sua proximidade com $TA^*(x, f^*, T^*)$. Quando f^* e T^* são submetidos para os modelos com $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$, T^* foi obtida. Os testes remanescentes envolveram a submissão de contagens nos arcos para o CP (as quais são significativamente diferentes de T^*) e várias matrizes OD prévias, nomeadas de PTT1–PTT5, nas linhas 4–8 da Tabela 1. PTT1 foi concebida significativamente diferente de T^* para rigorosamente testar os modelos. PTT2–PTT5 foram concebidas por Gur et al. (1980) para testar modelos para identificar alocações de tráfego em equilíbrio de usuário (não elásticas) para o CP. PTT2 e PTT3 são referidas como *Correct PTTs*, devido ao fato de que, se submetidas a um sistema de alocação de tráfego, uma situação de equilíbrio de usuário é obtida, com as contagens de fluxo nos arcos idênticas àquelas fornecidas. PTT4 é muito próxima de uma matriz OD correta e, por isso, referida como *Small Error PTT*. PTT5 é uma estimativa muito grosseira, referida por Gur et al. (1980) como *No Prior Information PTT*. As matrizes OD obtidas pelos modelos são apresentadas nas linhas 10–14 da Tabela 1. Foram experimentadas várias combinações de valores para σ_2 e σ_3 . Em geral, como era intuitivo, quanto maior a proximidade das contagens dos arcos (entradas da matriz OD prévia) de f^* (T^*), mais próximos σ_2 (σ_3) devem ser de 1,0. Para os três primeiros casos, os resultados dos dois modelos são idênticos. Para PTT4–PTT5 os resultados são muito similares. Pode-se constatar que os modelos produziram resultados excelentes para dados precisos e, sem surpresa, resultados que são mais e mais distantes de T^* à medida que a qualidade dos dados se deteriora.

6 Conclusões e trabalhos futuros

Foram revistas questões relacionadas à estimação de demandas de viagem em redes congestionadas de tráfego urbano. Foram descritos modelos de aproximação linear para estas redes, com demandas elásticas de viagens, custos assimétricos para os arcos e de desutilidade, bem como dados de entrada imprecisos e, possivelmente, inconsistentes. A experimentação computacional na resolução de um clássico problema teste (*Corridor Problem*) é favorável. Os autores estão em processo de extensão do trabalho com o intuito de acomodar dados incompletos e imprecisos, o que é modelado por meio do uso de *successive approximate fuzzy linear programs*, bem como para resolver problemas de múltiplos modos de transporte sobre um estrutura dinâmica quanto ao tempo. Quando isto tiver sido alcançado, acredita-se que os modelos resultantes irão se tornar ferramentas melhores e, portanto, mais úteis para os gestores de planejamento de tráfego.

7 Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) pelo apoio a esta pesquisa sob a forma de bolsa de doutoramento.

Referências

- Babonneau, F., du Merle, O., and Vial, J.-P. (2006). Solving large scale linear multicommodity flow problems with an active set strategy and proximal-accpm. *Oper. Res.*, 54(1):184–197.
- Babonneau, F. and Vial, J.-P. (2008). An efficient method to compute traffic assignment problems with elastic demands. *Transport. Sci.*, 42(2):249–260.
- Bar-Gera, H. (2002). Origin-based algorithm for traffic assignment problem. *Transport. Sci.*, 36(4):398–417.

- Beckmann, M., McGuire, C., and Winsten, C. (1956). *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, New Haven, Connecticut.
- Dafermos, S. (1982). The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand. *Networks*, 12(1):57–72.
- Florian, M. and Nguyen, S. (1974). A method for computing network equilibrium with elastic demands. *Transport. Sci.*, 8(4):321–332.
- Foulds, L. R., do Nascimento, H. A., Calixto, I. C., Hall, B. R., and Longo, H. (2013). A fuzzy set-based approach to origin-destination matrix estimation in urban traffic networks with imprecise data. *Eur. J. Oper. Res.*, 231(1):190–201.
- Foulds, L. R., do Nascimento, H. A. D., Calixto, I. C. A., Hall, B., and Longo, H. (2011). A fuzzy set approach to estimating OD matrices in congested brazilian traffic networks. In *Proc. XLIII Simp. Brasil. Pesq. Oper. (SBPO2011)*, pages 1386–1397, Brazil.
- Frank, M. and Wolfe, P. (1956). An algorithm for quadratic programming. *Nav. Res. Logist. Q.*, 3(1–2):95–110.
- García-Ródenas, R. and Verastegui-Rayó, D. (2008). A column generation algorithm for the estimation of origin-destination matrices in congested traffic networks. *Eur. J. Oper. Res.*, 184(3):860–878.
- Gartner, N. H. (1980a). Optimal traffic assignment with elastic demands: a review. part i: Analysis framework. *Transport. Sci.*, 14(2):174–191.
- Gartner, N. H. (1980b). Optimal traffic assignment with elastic demands: a review. part ii: Algorithmic approaches. *Transport. Sci.*, 14(2):192–208.
- Goffin, J.-L., Haurie, A., and Vial, J.-P. (1992). Decomposition and nondifferentiable optimization with the projective algorithm. *Manage. Sci.*, 38(2):284–302.
- Gur, Y. J., Turnquist, M., Schneider, M., Leblanc, L., and Kurth, D. (1980). *Estimation of an origin-destination trip table based on observed link volumes and turning movements*. Dept. of Transportation, Federal Highway Administration, Office of Research, Traffic Systems Division, Washington, Springfield, Va.
- Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G. (1980). *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Academic Press, New York, NY, USA.
- Kuhn, H. W. and Tucker, A. W. (1951). Nonlinear programming. In Neyman, J., editor, *Proc. Second Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–491, Berkeley, California, USA. University of California Press.
- Lasdon, L. S. (1970). *Optimization Theory for Large Systems*. MacMillan, New York, NY, USA.
- Leblanc, L. J. and Farhangian, K. (1982). Efficient algorithms for solving elastic demand traffic assignment problems and mode split-assignment problems. *Transportation Science*, 15(4):306–317.
- Nagurney, A. (1998). *Network Economics: A Variational Inequality Approach*. Advances in Computational Economics. Springer, Dordrecht, The Netherlands, second and revised edition.
- Nagurney, A. (2000). *Sustainable Transportation Networks*. Elgar Publisher, Cheltenham, UK.
- Patriksson, M. (1994). *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*. Topics in Transportation Series. VSP, Utrecht, The Netherlands.
- Sheffi, Y. (1984). *Urban Transportation Networks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Sherali, H. D., Narayanan, A., and Sivanandan, R. (2003). Estimation of origin-destination trip-tables based on a partial set of traffic link volumes. *Transport. Res. B-Meth.*, 37(9):815–836.
- Sherali, H. D., Sivanandan, R., and Hobeika, A. G. (1994). A linear programming approach for synthesizing origin-destination trip tables from link traffic volumes. *Transport. Res. B-Meth.*, 28(3):213–233.
- Smith, M. J. (1979). The existence, uniqueness and stability of traffic equilibrium. *Transport. Res. B-Meth.*, 13(4):295–304.
- USA Bureau of Public Roads (1964). Traffic assignment manual. Technical report, US Department of Commerce, Urban Planning Division, Washington DC, USA.