Sur le caractère égalitaire de l'allocation de ressources distribuée

S. Estivie[1], Y. Chevaleyre[1], U. Endriss[2], N. Maudet[1]

[1] *LAMSADE*
Université Paris Dauphine
75775 Paris cedex 16, France

[2] *ILLC,*
University of Amsterdam,
1018 TV Amsterdam, The Netherlands

RÉSUMÉ. *Dans le domaine des Systèmes MultiAgents, la très large majorité des recherches dédiées à l'allocation de ressources indivisibles se focalisent sur le problème* centralisé *des enchères combinatoires. On peut aborder le problème par une autre approche en distribuant cette prise de décision et en recourant à la négociation entre agents. Dans cet article, nous nous plaçons dans le cadre restreint (mais cependant très réaliste) des échanges bilatéraux, et nous nous intéressons principalement au problème de l'atteinte d'allocation optimale au sens* égalitaire, *et non utilitaire. La question qui sous-tend cette recherche est donc la suivante : sachant que les échanges individuellement rationnels sont bien adaptés à l'obtention d'un bien-être social utilitaire, dans quelle mesure ces transactions permettent-elles d'atteindre ou d'approcher un optimum égalitaire ?*

ABSTRACT. *The vast majority of multiagent research adressing the problem of the allocation of indivisible goods has concentrated on centralized mechanisms, typically combinatorial auctions. Distributed procedures considers instead that agents locally negotiate by agreeing on deals. In this paper, we consider the restricted negotiation framework consisting of bilateral deals only, and investigate the egalitarian properties of these distributed allocation procedures when agents are individually rational.*

MOTS-CLÉS : *Simulation MultiAgent, Allocation de ressources, Négociation, Bien-être social*

KEYWORDS: *MultiAgent Simulation , Resource Allocation, Negotiation, Social Welfare*

1. Introduction

La très large majorité des recherches en Intelligence Artificielle dédiées à l'allocation de ressources indivisibles concernent le problème *centralisé* des enchères combinatoires [CRA 06]. Les enchérisseurs reportent leurs préférences concernant différents *lots* d'objets au commissaire-priseur. Dans ce cas-là, le problème de la détermination de l'allocation optimale (au sens où elle maximise le gain du commissaire-priseur) est connu pour être NP-complet. Même si des algorithmes de plus en plus performants sont développés [SAN 06], il paraît clair que cette approche centralisée est inadaptée lorsque le nombre de ressources excède une certaine limite [GRA 05], ainsi que dans les situations où il n'existe pas d'agent pouvant tenir le rôle du commissaire-priseur (ou encore si celui-ci n'est pas digne de confiance).

Une manière alternative d'aborder le problème consiste à distribuer cette prise de décision, en recourant à la négociation entre agents. Dans ce cas-là, les agents contractent de manière autonome des transactions les uns avec les autres, sur la base de critères locaux de rationalité. Partant d'une allocation initiale, les agents progressent donc pas à pas, chaque transaction permettant de passer à une nouvelle allocation. Le rôle du concepteur de l'application est alors de réguler les échanges, de telle façon que certaines propriétés puissent être garanties, en particulier que l'allocation finale sera effectivement optimale. Le critère social retenu pour évaluer le bien-être de la société dans son ensemble est généralement la somme des satisfactions des agents de la société (bien-être social *utilitariste*). Cette approche représente selon nous un enjeu majeur pour la communauté multiagent.

Cette approche a récemment retenu l'attention de plusieurs auteurs [SAN 98, DUN 05b, END 03a]. Un résultat fondamental, dû à Sandholm, montre que des échanges d'une complexité arbitraire peuvent être nécessaires pour atteindre une allocation optimale au sens utilitariste. Il est pourtant peu pertinent de se placer dans ce cadre général, car les transactions utilisées en pratique sont extrêmement simples : elles n'impliquent souvent que deux agents (échanges bilatéraux) ainsi qu'un nombre très restreint de ressources [SAN 98]. Comment alors continuer à garantir des propriétés intéressantes pour le système ? Une solution consiste à émettre des hypothèses quant à la structure utilisée pour représenter les préférences des agents. Différents résultats “positif” du type *“si une structure de préférences X est utilisée par les agents, alors les transactions de type Y sont suffisantes pour garantir que la négociation va s'achever sur une allocation optimale”*, ou “négatif” du type *“il suffit cependant qu'un agent ne respecte pas cette condition pour que ce type de transaction ne soit plus suffisant”* ont été établis ces dernières années [END 03a, END 03b, CHE 05].

Dans cet article, nous nous plaçons dans le cadre restreint (mais très réaliste) des échanges bilatéraux, et nous nous intéressons principalement au problème de l'atteinte d'allocation optimale au sens *égalitariste*, et non utilitariste. Les mesures de bien-être social égalitaire ont récemment reçu une attention importante, même dans des domaines d'application comme le commerce électronique où leur pertinence n'est pas directement évidente. Il s'agit par exemple de s'assurer qu'aucun agent n'est complètement lésé par une allocation donnée (allocation de bande passante, par exemple) ; il s'agit encore de diversifier ses sources d'achat afin de sécuriser son approvisionnement (dans le cas des enchères combinatoires inversées [REY 04]) ; il s'agit enfin de vérifier que l'allocation obtenue n'engendre pas d'envie entre les agents [BOU 05a] (ce qui peut être préjudiciable à long terme, dans le cadre de coalitions). Ce qui est commun à tous ces exemples est le fait qu'une simple mesure utilitariste ne peut pas rendre compte des notions de justice citées : les allocations optimales ne sont pas nécessairement les plus efficaces, au sens classique du terme.

La question qui sous-tend cette recherche est donc la suivante : si l'on sait que les échanges individuellement rationnels "égoïstes" sont bien adaptés à l'obtention d'un bien-être social utilitaire, dans quelle mesure ces transactions permettent-elles d'atteindre ou d'approcher un optimum égalitaire ? Sachant théoriquement que ces allocations optimales ne sont en général *pas* atteintes, on utilisera une démarche expérimentale permettant de compléter les résultats théoriques. De même, dans certains cas, il arrive que *toutes* les allocations possibles soient inégalitaires (ce qui se traduit par un bien-être social égalitaire optimal nul). Pour compléter notre étude, nous chercherons à comprendre sous quelles conditions ce phénomène apparaît.

La structure de ce papier est la suivante. La section 2 décrit le cadre de l'allocation de ressources qui concerne notre étude, rappelle quelques résultats théoriques importants, et rappelle un résultat de complexité important pour l'appréciation de la suite de l'article. Nous décrivons ensuite le protocole expérimental mis en place (Section 3). Le premier jeu d'expérimentations mené consiste à évaluer les négociations générées lorsque les préférences des agents sont simplement des fonctions d'utilité additives. On teste ensuite le comportement des négociations avec des fonctions d'utilités additives généralisées (k-additives). La section Sect. 4 propose une première interprétation de ces résultats, et corrobore théoriquement certains des phénomènes observés. Nous concluons en évoquant quelques pistes de recherches ouvertes par ce travail.

2. Allocation de Ressources Distribuée

2.1. *Agents et Resources*

Dans ce cadre, un ensemble fini de n agents (noté $\mathcal{A}$) négocient la possession d'un ensemble fini de m resources (noté $\mathcal{R}$). Ces ressources ont la particularité d'être *non-divisibles* (il n'est pas possible de segmenter la ressource) et *non-partageables* (à un instant de la négociation, un agent seulement peu posséder une ressource donnée). On suppose également que toute ressource doit être attribuée à un agent. Une *allocation* (notée A) est donc une partition de $\mathcal{R}$ parmi $\mathcal{A}$ qui attribue chaque ressource à un agent. Ainsi, $A(i) = \{r_1, r_4\}$ signifie que dans l'allocation A, l'agent i possède les ressources r_1 et r_4. Le moyen dont dispose les agents pour faire évoluer l'allocation est d'effectuer des *transactions* avec un ou plusieurs autres agents qui peuplent la société durant lesquelles une ou plusieurs ressources changent de propriétaire. Formellement, une transaction δ est simplement le passage d'une allocation à une autre (*i.e.* $\delta = (A, A')$), qui peut impliquer un nombre arbitraire d'agents et de ressources. Evidemment, dans la réalité, il n'est pas envisageable d'implémenter des transactions trop complexes. On s'intéresse donc généralement à des catégories de transactions plus restreintes, en particulier les transactions simples, qui n'impliquent que le passage d'*une* ressource d'un agent à un autre [SAN 98]. On considère aussi que les transactions peuvent être facilitées par des *compensations monétaires*.

2.2. *Préférences des agents*

Chaque agent évalue la satisfaction qu'il a à posséder les *lots* de ressources (qu'il peut se voir attribuer au cours de la négociation) à l'aide d'une fonction d'utilité (c'est donc une fonction de $2^{\mathcal{R}} \to \mathbb{R}$). On écrira $u_i(A(i))$ pour l'utilité de l'agent i à détenir les ressources qui lui sont assignées par l'allocation A. On fait ici l'hypothèse que ces fonctions ne traduisent pas d'*externalités*, au sens où un agent calcule sa satisfaction sur la base des ressources qu'il possèdent seulement : on notera donc simplement $u_i(A)$.

Il est fréquent de représenter les préférences des agents avec des utilités additives, qui ont l'avantage d'être simples, compactes et facilement interprétables. En associant un coefficient α_r^i à chaque resource r, une utilité additive u_i peut s'écrire sous la forme d'une somme $u_i(R) = \sum_{r \in R} \alpha_r^i$. Pour alléger l'écriture ces utilités additives seront représentées sous la forme d'une combinaison linéaire. Par exemple $u_i(R) = 2 \times r_1 + 3 \times r_2 + 7 \times r_3$. Dans cette formule, les r_1, r_2, r_3 peuvent être interprétés comme des variables valant 1 si l'agent possède la ressource, et 0 sinon. Ainsi :

$$u_i(\{r_1, r_3\}) = 2 + 7 = 9$$

La représentation additive à l'inconvénient majeur d'être très grossière, du fait qu'elle ne peut pas rendre compte de l'interaction entre ressources. C'est pourquoi dans cet article, on s'intéressera à une généralisation de cette représentation, dite représentation k-*additive* [GRA 97, CHE 04]. L'idée est ici que l'utilité assignée à un lot R peut être représentée comme la somme des utilités marginales attribuées à des sous-lots de R de cardinalité $\leq k$. On utilisera la notation suivante :

$$u_i = \sum_{t \subseteq R} \alpha_t^i$$

Cette formule doit se lire de la façon suivante : un agent i aura un gain d'utilité α_t^i lorsqu'il possède *ensemble* toutes les ressources qui composent le terme t (en d'autres mots, α_t^i représente en quelque sorte la "valeur synergique" de ces ressources). Quand cette valeur est positive, on dit que les ressources sont *complémentaires*. Quand elle est négative, on dit qu'elles sont *substituables*. Par exemple, la fonction multinomiale

$$u_1(R) = 2r_1 + 2r_2 + 6r_1r_2$$

illustre un cas où les ressources r_1 et r_2 sont complémentaires : l'agent serait satisfait avec une valeur 2 de posséder r_1 ou r_2, mais il attriburait une utilité 10 au lot composé des deux ressources. Cette représentation k-additive est pleinement expressive, c'est-à-dire qu'elle est capable de représenter toute fonction d'utilité. Elle s'avère adaptée, bien sûr, dans les situations où les synergies entre les ressoures existent, mais restent néanmoins limitées à des lots d'une cardinalité raisonnable.

2.3. *Rationalité des agents*

C'est leur satisfaction personnelle immédiate qui va motiver les agents à accepter ou refuser une transaction. En ce sens, la rationalité des agents est clairement *égoiste* et *myopique* (au sens où ils ne sont pas capable d'anticiper sur des gains futurs). Plus précisemment, on définit l'acceptabilité des transactions grâce à la notion de rationalité suivante :

Définition 2.1 (Rationalité Individuelle). *Une transaction $\delta = (A, A')$ avec paiement compensatoire est rationnelle ssi il existe un vecteur de paiement $\overrightarrow{p} \in \mathbb{R}^n$ tel que $u_i(A') - u_i(A) > p[i]$ pour tout $i \in \mathcal{A}$, à l'exception éventuelle de $p[i] = 0$ pour les agents non impliqués dans cette transaction (agents i tels que $A(i) = A'(i)$).*

Il a été montré dans [END 03a] qu'une transaction est individuellement rationnelle *si et seulement si* elle accroît le bien-être social utilitariste. Nous l'avons déjà dit cependant, cette mesure ne sera pas notre principal critère d'évaluation ici.

2.4. *Mesures de Bien-être Social*

Comment définir le bien-être de la société dans sa globalité ? Répondre à cette question revient à définir une mesure de *bien-être social* (BES). La mesure la plus couramment employée dans le cadre de la communauté multiagents est sans nul doute la mesure *utilitariste*, définie comme la somme des utilités des agents peuplant la société. Or, comme nous le discutons dans la section précédente, cette notion s'avère inadaptée dans bien des situations. La littérature économique donne de multiples autres exemples de mesures de bien-être social [MOU 88] qui tentent de favoriser les allocations non seulement efficaces (au sens utilitariste), mais aussi "justes", "équitables" ou "égalitaires". Dans cet article, on s'intéresse à la mesure de bien-être social *égalitariste* qui consiste à maximiser l'utilité de l'agent le moins satisfait de la société.

Définition 2.2 (Bien-être Social Egalitaire). *Le bien-être social égalitaire $sw_e(A)$ d'une alloation de ressources A est défini comme suit :*

$$sw_e(A) \quad = \quad \min\{u_i(A) \mid i \in \mathcal{A}\}$$

On s'intéressera aussi par la suite au bien-être social égalitaire optimal défini ainsi :

$$sw_e^{opt} = argmax_A sw_e(A)$$

2.5. *Résultats Théoriques*

On rappelera informellement pour commencer le résultat essentiel suivant, dû à Sandholm [SAN 98] : n'importe quelle séquence de transactions mêne à une allocation optimale au sens utilitariste. Malheureusement, ce résultat ne tient que si l'on autorise des échanges de complexité arbitraire. Dès que des contraintes sont posées sur le type de transaction autorisées, il n'est, en général, plus possible de garantir cette issue optimale de la négociation. On s'intéresse alors à des scénarios de négociation restreints, pour lesquels on suppose une structure donnée sur les préférences des agents. Dans le cas des transactions simples, on connait par exemple le résultat suivant [END 03a] :

Théorème 2.1 (Scenarios Additifs). *Pour les scénarios additifs, n'importe quelle séquence de transactions simples rationnelles mène à une allocation optimale au sens utilitariste.*

Ce résultat positif indique que les transactions simples *suffisent* à garantir l'atteinte d'une allocation optimale au sens utilitariste. Mais qu'en est-il du bien-être social égalitaire ? Une première approche est de considérer que le critère de rationalité n'est pas adapté, il convient de rechercher d'autres notions de rationalités. C'est l'approche adoptée dans [END 03b], par exemple, qui proposent la notion de transactions *équitables* qui garantissent l'atteinte du bien-être social égalitaire. Cette notion de rationalité suppose néanmoins que les agents soient extrèmement coopératifs puisqu'ils peuvent se trouver moins satisfaits après avoir opéré une transaction ce qui est peu réaliste en pratique. L'approche que nous poursuivons ici, différente, est donc la suivante : en supposant que les agents utilisent une notion égoiste pour évaluer l'acceptabilité de leur transactions, dans quelle mesure les négociations menées débouchent-elles sur des allocations optimales au sens égalitaire ?

Rappelons tout d'abord un résultat récent [BOU 05b] relatif à la difficulté du problème d'optimisation du bien-être égalitaire avec des fonctions d'utilité simplement additives.

Théorème 2.2. *Même avec des utilités additives, trouver l'optimum égalitaire est un problème NP-difficile.*

Une conséquence de ce résultat théorique est que, comme on pourra l'observer sur certaines expérimentations, l'optimum égalitaire ne sera pas systématiquement atteint, et ce quelque soit l'algorithme de complexité polynomiale utilisé (sauf si P=NP). Notons que ce résulat négatif suppose une structure de préférence très simple : c'est donc un résultat très fort (à comparer par exemple au problème équivalent dans le cadre utilitariste). Ce résultat est aussi à rapprocher du fait suivant, déjà observé dans [END 03b] : même en restreignant la classe des fonctions d'utilité employées à la classe la plus simple concevable des préférences *binaires additives* (les agents ne peuvent exprimer alors que le fait qu'ils souhaitent ou non une ressource), des transactions complexes sont nécessaires pour garantir l'atteinte d'une allocation optimale au sens égalitariste.

3. Expérimentations

Nous présentons à présent les expérimentations menées dans le cadre de notre étude, en commençant par détailler le protocole expérimental utilisé.

3.1. *Présentation du protocole expérimental*

Les agents sont contraints par le système à ne faire que des transactions rationnelles, c'est-à-dire qu'un agent n'échange sa ressource que si un autre agent lui offre plus que la plus-value qu'elle lui apporte. Chaque agent dispose d'une fonction d'utilité k-additive qui pourra être restreinte selon les expérimentations. Ces fonctions sont composées de coefficients entiers que nous avons choisi de tirer aléatoirement sur l'intervalle]0,10].

Nous avons au cours des expérimentations fait varier différents paramètres tels que le nombre d'agents, de ressources, de termes puis nous avons observé le comportement des différents bien-être en fonction de ces changements. Chaque point des courbes ci-après correspond à la valeur moyenne du bien-être social obtenue sur 1000 expérimentations complètes.

Le déroulement chaque expérimentation consiste en 3 phases :

Création du système : initialisation des agents, tirage aléatoire de leurs fonctions d'utilité, et répartition aléatoire et uniforme des ressources entre les agents.

Calcul des allocations optimales : pour les différents bien-être (égalitaire et utilitaire), dans le but de pouvoir juger de la qualité de l'allocation de ressources après la négociation. Observons que ce calcul nécessite une énumération exhaustive de toutes les allocations possibles : la conséquence est que les simulations résultantes sont longues, ce qui rend difficile les tests avec des valeurs trop importantes.

Négociation : elle se déroule de la façon suivante : un premier agent prend la parole, et propose une première ressource et ainsi de suite jusqu'a ce qu'il ait proposé toutes ses ressources, puis c'est au tour d'un deuxième agent de faire la même chose. Ceci dure jusqu'à ce que tous les agents aient eu leur tour de parole. A la fin de cela, on recommence à donner la parole au premier agent, ce qui entame un nouveau tour, et ceci jusqu'à ce qu'un tour complet ait lieu sans qu'il n'y ait aucun échange (condition d'arrêt de la négociation). On sera alors sûr que plus aucune transaction rationnelle n'est possible et que la négociation peut être arrêtée. Remarquons au passage que cet algorithme, du fait de la longueur des séquences de transactions impliquées, est exponentiel dans le cas général [DUN 05a], mais polynomial dans la cas des fonctions simplement additives [END 05].

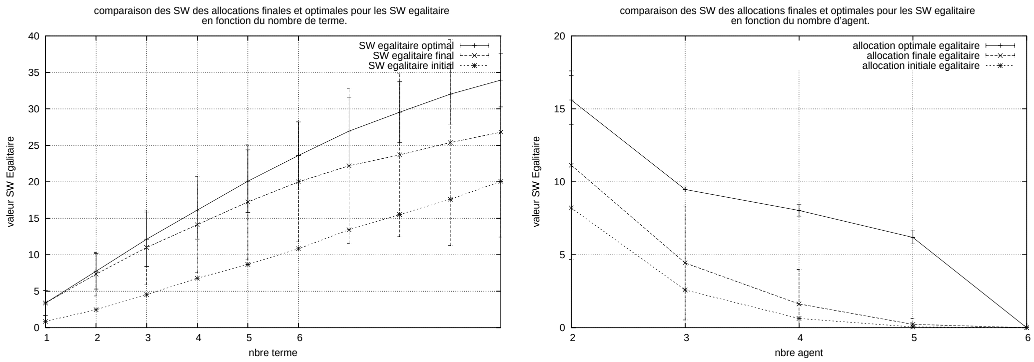

Figure 1. *BES égalitaires en fonction du nombre de termes et d'agents*

3.2. *Experimentations avec fonctions d'utilité additives*

La première série d'expérimentations que nous présentons concerne les fonctions d'utilité additives, c'est-à-dire des fonctions dont chaque terme n'est composé que d'une ressource. Pour cela, nous avons fait varier le nombre de termes (l), d'agents (n) et de ressources (m), en observant comment se comporte les bien-être égalitaires (optimal et final). On étudie ici les variations suivantes :

(Fig 1a) Variation du nombre de termes des fonctions d'utilités de chaque agent, avec n=2, m=10, l=1..10

(Fig 1b) Variation du nombre d'agents composant le système, avec les paramètres m=5, l=5, n=2..6

Chaque graphique présente trois courbes qui représentent la valeur moyenne du BES égalitaire respectivement pour l'allocation initiale (c'est-à-dire l'allocation tirée aléatoirement et uniformément au début de chaque expérimentation), l'allocation finale (celle à partir de laquelle plus aucune transaction rationnelle n'est possible), et l'optimale.

Plusieurs observations peuvent être faites à partir de ces jeux d'expérimentations. Tout d'abord, on constate sur la première figure que l'allocation finale décroche du BES égalitaire optimal quand le nombre de termes augmente, ce qui n'est pas surprenant étant donné le résultat de NP-difficulté énoncé dans la section précédente. La figure 1b montre clairement que la valeur de l'allocation optimale chute de manière assez régulière lorsque le nombre d'agents augmente, puis brutalement lorsque l'on atteint le nombre de 6 agents. Intuitivement, on comprend qu'il est inévitable, à partir

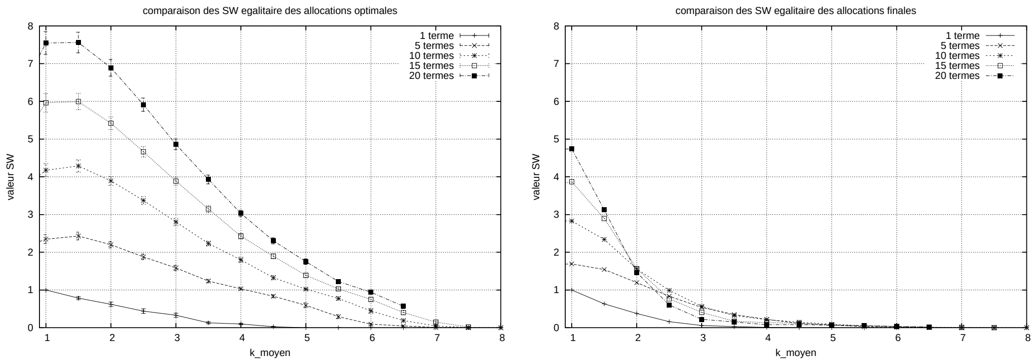

Figure 2. *Evolution des BES égalitaires en fonction du nombre de termes.*

d'un certain nombre d'agents, qu'au moins un agent se trouve totalement démuni. Une analyse détaillée de ces phénomènes est proposée en Sect. 4.

3.3. *Expérimentations avec des fonctions d'utilité k-additives*

Notre objectif est à présent d'étudier la sensibilité de l'évolution du bien-être social égalitaire à la "complexité" des fonctions d'utilité des agents. La mesure que nous emploierons pour apprécier cette complexité est celle du k-moyen d'une fonction. Le k-moyen est égal au nombre moyen de ressource composant les termes de cette fonction. Par exemple la fonction

$$u = 2r1r5 + 3r1 + 4r1r4r5$$

possède un k-moyen de 2 ((2+1+3)/3). Le but de ces expérimentations est de comparer le bien-être égalitaire *final* (après négociation) avec le bien-être égalitaire *optimal*.

Nous allons suivre le même procédé expérimental que dans 3.2 en faisant varier le nombre de termes, d'agents et de ressources, mais cette fois-ci nous étudierons les variations en fonctions des valeurs de k-moyen.

(Fig 2) Variation du nombre de termes des fonctions d'utilité, avec n=2, m=10, l=1,5,10,15,20.

(Fig 3) Variation du nombre d'agents dans le système, avec les paramètres n=2,3,4,5,6, m=5, l=5.

Ces expérimentations permettent d'observer certains phénomènes intéressants. Il apparait tout d'abord, ce qui est conforme à l'intuition, que le BES tombe à une valeur nulle en atteignant une certaine limite pour le k-moyen. On observe cependant

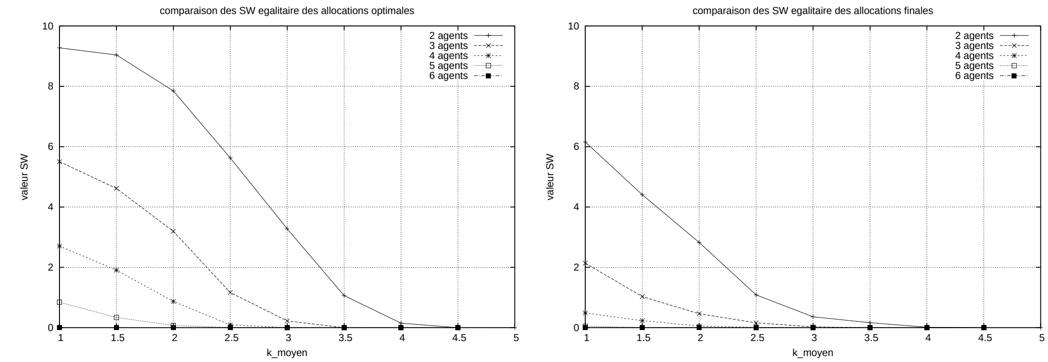

Figure 3. *Evolution des BES égalitaires en fonction du nombre d' agents.*

que cette valeur dépend très peu du nombre de termes (Fig. 2). Notons que ce phénomène semble différer de celui observé pour la figure 1 : ici le nombre de ressources et d'agents est constant, mais c'est la "complexité" des fonctions d'utilité qui augmente les probabilités de "blocage" entre agents. Dans ce cas-là, la chute vers le 0 est moins brutale : il faut se rappeler que (dans une certaine mesure) même supérieure à 1, la valeur k-moyenne n'interdit pas que certains termes soient de cardinalité égale à 1. Nous proposons une analyse détaillée de ces situations en section Sect. 4.

On observe de surcroit que lorsque la valeur de k_{moyen} est relativement faible, l'écart entre les valeurs optimales et les valeurs finales obtenues sont relativement constantes, ce qui nous conforte dans notre démarche qui consiste à étudier en premier lieu les valeurs optimales du BES dans les configurations proposées. Ensuite, lorsque k_{moyen} augmente, on assiste à un décrochage du BES final par rapport au BES optimal.

4. Etude théorique du bien-être social égalitaire optimal

Dans cette section, nous tenterons de proposer une explication théorique de ce qui a été observé expérimentalement. Nous étudierons exclusivement le BES égalitaire optimal, et délaisserons le BES égalitaire final pour plusieurs raisons : d'abord parce qu'une étude sur le BES optimal est un préalable nécessaire à l'étude du BES final, ensuite parce que le BES optimal peut être considéré comme une borne supérieure au BES final, et enfin pour des raisons de simplicité. Pour commencer, nous établirons une borne supérieure simple sur la sw_e qui donnera quelques clés pour comprendre sa décroissance rapide constatée sur les schémas précédents. Ensuite, en nous appuyant sur un modèle statistique des fonctions d'utilités, nous développerons des résultats plus fins.

4.1. *Bornes sur le bien-être social égalitaire optimal*

Commençons par constater que, quelques soient les valeurs des diverses utilités u_i, l'inégalité suivante est toujours vraie :

$$\min_i u_i \leq \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}$$

Dès lors, on en déduit que pour une allocation A donnée, on a

$$sw_e(A) \leq \frac{sw_u(A)}{n}$$

. On a donc une première borne naïve :

$$sw_e^{opt} \leq \frac{sw_u^{opt}}{n}$$

Pour obtenir une borne plus précise, il nous faut introduire une fonction croissante concave $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ qui borne la valeur des utilités en fonction du nombre de ressources : $u_i(R) \leq f(\mid R \mid)$[1]. Dans ce cas, on a pour toute allocation A :

$$sw_e(A) \leq \frac{\sum u_i(A)}{n} \leq \frac{\sum f(\mid A(i) \mid)}{n}$$

Du fait de la concavité de f, on a

$$sw_e(A) \leq \frac{\sum f(\mid A(i) \mid)}{n} \leq f(\frac{\sum \mid A(i) \mid}{n}) \leq f(\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor)$$

Dans le cas ou toutes les utilités sont 1-additives et sont constituées d'au plus l termes chacunes, si l'on désigne par α_{max} le plus grand coefficient apparaissant dans ces utilités, alors on peut construire les fonction $f_1(x) = x \times \alpha_{max}$ ou $f_2(x) = \min(x, l) \times \alpha_{max}$ selon qu'on veuille prendre en compte le nombre de termes ou non. On a donc $sw_e^{opt} \leq \min(\frac{m}{n}, l) \times \alpha_{max}$, ou plus simplement

$$sw_e^{opt} \leq \frac{m}{n} \times \alpha_{max} \quad , \quad sw_e^{opt} \leq l \times \alpha_{max}$$

Dans les cas ou les utilités sont k-additives avec un seul terme, on peut choisir comme fonction $f(x) = \frac{\alpha_{max}}{k}$, ce qui nous donne

$$sw_e^{opt} \leq \frac{m}{k.n} \times \alpha_{max}$$

Dans le cas ou les utilités sont k-additives avec un nombre quelconque de termes l, il est plus difficile de construire une fonction f concave qui soit intéressante pour établir une borne, en particulier lorsque le nombre de termes présents dans les utilités est grand.On pourra toutefois choisir la fonction $f(x) = \frac{x \times l \times \alpha_{max}}{k}$ tout en sachant que la borne obtenue n'est pas serrée :

$$sw_e^{opt} \leq \frac{m.l}{k.n} \times \alpha_{max}$$

1. Notons qu'une telle fonction existe toujours, du fait que le domaine de définition de u_i est fini.

Les expérimentations de la section précédentes peuvent maintenant être réexaminées à la lumière des bornes développées dans cette section. De façon évidente, le paramètre α_{max} présent dans les bornes n'apparaît que très rarement dans les expérimentations où les coefficients sont tirées aléatoirement. Par conséquent, en substituant à α_{max} une valeur moyenne $\alpha_{moyen} = 5$, les bornes perdent leur caractère exact, mais se rapprochent considérablement des courbes réelles, et nous permettent d'évaluer leur pertinence.

– Examinons les expérimentations avec utilités additives. Pour la figure 1b, la borne devient $sw_e^{opt} \lesssim \frac{25}{n}$, ce qui correspond très précisemment aux données. Pour la figure 1a, la borne devient $sw_e^{opt} \lesssim 5 \times l$, ce qui de nouveau est très proche de la courbe. L'infléchissement concave de cette courbe lorsque l croit peut s'expliquer par la concavité de la borne $\min(\frac{m}{n}, l)$.

– Concernant les expérimentations avec utilités k-additives. La borne correspondant au aux expérimentations avec un seul terme sur le premier graphique est $sw_e^{opt} \lesssim \frac{25}{k}$. Bien que la borne soit extrêmement éloignée de la courbe et n'ait pas de valeur prédictive, on peut constater que les courbes du graphique ont à peu près la même forme. Ces courbes s'annulent brutalement lorsque k augmente, ce qui n'est pas expliqué par nos bornes, et constitue l'objet de la prochaine section.

4.2. *Conditions d'annulation du bien-être social égalitaire*

Les bornes obtenues ci-dessus sont suffisantes pour interpréter les cas simples (utilités additives). Dans les cas plus complexes (k-additivité avec plusieurs termes), on peut remarquer en observant les graphiques que lorsque le nombre d'agents, la valeur du paramètre k croissent, le bien-être social égalitaire devient soudainement nul, ce qui n'est absolument pas expliqué par ces bornes. Cette section propose d'abord d'élucider les conditions qui mènent à l'annulation du bien-être social. Pour simplifier l'étude, nous mènerons notre raisonnement en supposant que les utilités k-additives de chaque agent ne possèdent *que* des termes comportant exactement k ressources. Commençons par envisager les deux situations qui mènent systématiquement à un BES égalitaire nul :

Pénurie de resources. Si le nombre d'agents dépasse le nombre de ressources, alors l'un des agents sera nécessairement dépourvu de resources, auquel cas on a bien $sw_e = 0$. Plus généralement, en prenant en compte le fait qu'un agent a besoin d'au moins k resources pour avoir une utilité non nulle, le bien-être social égalitaire sera nul si $\frac{m}{n} < k$. La situation de pénurie de resources explique la chute de la SW égalitaire sur la figure 4.

Blocage entre agents. Il est cependant des cas qui ne correspondent pas à des situations de pénurie, mais qui provoquent nécessairement une annulation du BES égalitaire. Considérons deux agents ayant les fonctions d'utilités suivantes : $u_1 = r_1 r_2 + r_3 r_4$, et $u_2 = r_1 r_3 + r_2 r_4$. Si l'un des agents possède des ressources donnant à son utilité une valeur non nulle, alors l'autre agent aura nécessairement une utilité nulle. Dans ce cas, quelque soit l'allocation A, on a $sw_e(A) = 0$. C'est ce que nous appellons une *situation de blocage*. Notons que cette situation peut se produire en impliquant un nombre arbitraire d'agents. Une étude plus détaillée de cette situation est nécessaire afin de pouvoir en dégager des conditions qui pourraient être pertinentes.

Afin de vérifier cette analyse, nous avons mené d'autre expérimentations qui ne sont pas présentées ici, avec des utilités comportant exactement k ressources. Les phénomènes de blocage et de pénurie annulent le BES exactement dans conditions prédites, ce qui valide l'analyse. L'interprétation des expérimentations présentées dans les sections précédentes à la lumière de ces phénomènes est plus délicate, du fait que les termes possèdent un nombre variable de ressources, ce qui est contraire à l'hypothèse qui sous-tend notre analyse. Il est clair que lorsque la taille des termes est variable, les termes les plus petits sont les plus important au regard du BES égalitaire. Des lors, pour vérifier les conditions de blocage et de pénurie sur nos expérimentations, il faudrait utiliser la valeur minimale de k dans chaque utilité, que nous nommerons k_{min}. Ne disposant que du k_{moyen}, remarquons que l'on peut estimer (très approximativement) la valeur de k_{min} en soustrayant à la moyenne de k son écart-type. Du fait de la façon dont les utilités ont été générées, k_{moyen} suit une loi binomiale, et donc :

$$k_{min} \approx k_{moyen} - \sigma \approx k_{moyen} - \sqrt{\frac{k_{moyen} \times (l - k_{moyen})}{l}}$$

En vérifiant les conditions de blocage et de pénurie avec k_{min} sur les courbes des expérimentations k-additives, on peut corroborer certains résultats. Sur la figure 2, avec 10 termes, l'annulation du BES égalitaire due à la pénurie surviennent théoriquement en $k_{min} = 5$, c'est-à-dire $k_{moyen} = 5$, ce qui corrobore exactement l'observation. Concernant la figure 3, avec 3 agents, la pénurie doit survenir en $k_{min} = 1.25$. Du fait que $k_{moyen} \approx k_{min} + 1$, le BES devrait s'annuler à peu près en $k_{moyen} = 2.25$. La courbe montre que le BES égalitaire s'annule en 2.5, ce qui valide à nouveau notre analyse.

5. Conclusion

Cet article est une étude expérimentale et théorique des conditions d'atteinte d'une allocation optimale au sens du bien-être social égalitaire, losque les transactions employées par les agents sont simples, et lorsque le critère de rationalité des agents est égoiste et myopique. Le problème d'optimisation du bien-être social égalitaire est NP-difficile, même dans le cas où les fonctions d'utilité des agents sont additives. On présente ensuite une étude expérimentale visant à faire apparaître certaines régularités dans l'évolution du bien-être social égalitaire, et de tester la sensibilité aux paramètres que sont le nombre de ressources, d'agents, ou encore la complexité des fonctions d'utilités employées. On propose enfin une interprétation de ces observations qui, si elle reste à peaufiner, suggère de premiers éléments de compréhension pour interpréter ces expériences.

6. Bibliographie

[BOU 05a] BOUVERET S., LANG J., « Efficiency and Envy-freeness in Fair Division of Indivisible Goods : Logical Representation and Complexity », *Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2005)*, 2005.

[BOU 05b] BOUVERET S., FARGIER H., LANG J., LEMAÎTRE M., « Allocation of Indivisible Goods : A General Model and some Complexity Results », *Proceedings of the 4th International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS-2005)*, ACM Press, 2005.

[CHE 04] CHEVALEYRE Y., ENDRISS U., ESTIVIE S., MAUDET N., « Multiagent Resource Allocation with k-additive Utility Functions », *Proceedings of the DIMACS-LAMSADE Workshop on Computer Science and Decision Theory*, Annales du LAMSADE 3, 2004.

[CHE 05] CHEVALEYRE Y., ENDRISS U., MAUDET N., « On Maximal Classes of Utility Functions for Efficient one-to-one Negotiation », *Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2005)*, 2005.

[CRA 06] CRAMTON P., SHOHAM Y., STEINBERG R., Eds., *Combinatorial Auctions*, MIT Press, 2006, To appear.

[DUN 05a] DUNNE P. E., « Extremal Behaviour in Multiagent Contract Negotiation », *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 23, 2005, p. 41–78.

[DUN 05b] DUNNE P. E., WOOLDRIDGE M., LAURENCE M., « The Complexity of Contract Negotiation », *Artificial Intelligence*, vol. 164, n° 1–2, 2005, p. 23–46.

[END 03a] ENDRISS U., MAUDET N., SADRI F., TONI F., « On Optimal Outcomes of Negotiations over Resources », *Proceedings of the 2nd International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS-2003)*, ACM Press, 2003.

[END 03b] ENDRISS U., MAUDET N., SADRI F., TONI F., « Resource Allocation in Egalitarian Agent Societies », HERZIG A., CHAIB-DRAA B., MATHIEU P., Eds., *Secondes Journées Francophones sur les Modèles Formels d'Interaction (MFI-2003)*, Cépaduès-Éditions, May 2003, p. 101–110.

[END 05] ENDRISS U., MAUDET N., « On the Communication Complexity of Multilateral Trading : Extended Report », *Journal of Autonomous Agents and Multiagent Systems*, vol. 11, n° 1, 2005, p. 91–107.

[GRA 97] GRABISCH M., « k-order Additive Discrete Fuzzy Measures and their Representation », *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 92, 1997, p. 167–189.

[GRA 05] GRADWELL P., PADGET J., « Distributed Combinatorial Resource Scheduling », *Proceedings of the 1st International Workshop on Smart Grid Technologies (SGT-2005)*, 2005, To appear.

[MOU 88] MOULIN H., *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press, 1988.

[REY 04] REYES-MORO A., RODRÍGUEZ-AGUILAR J. A., « iAuctionMaker : A Decision Support Tool for Mixed Bundling », *Agent-Mediated Electronic Commerce VI*, 2004.

[SAN 98] SANDHOLM T. W., « Contract Types for Satisficing Task Allocation : I Theoretical Results », *Proceedings of the AAAI Spring Symposium : Satisficing Models*, 1998.

[SAN 06] SANDHOLM T. W., « Optimal Winner Determination Algorithms », CRAMTON P., SHOHAM Y., STEINBERG R., Eds., *Combinatorial Auctions*, MIT Press, 2006, To appear.